Il Teorema di non-squeezing di Gromov

Candidato: Hajg Jasa
Relatore: Dott. Alberto Della Vedova

Università di Milano Bicocca
Dipartimento di Fisica G. Occhialini
Corso di Laurea Triennale in Fisica

21/11/2018

Introduzione

- Geometria simplettica $\longleftrightarrow$ meccanica classica
- Moti meccanici
- Proprietà di non-squeezing
- Distanze tra diffeomorfismi hamiltoniani
- Energia di spostamento
- Sottovarietà lagrangiane

I moti meccanici

- In $\mathbb{R}^{2n}$ con coordinate $(p_1, ..., p_n, q_1, ...q_n)$ una particella di massa unitaria soggetta a un potenziale $\Phi(q,t)$ ha energia totale:

$$H(p,q,t) = \frac{|p|^2}{2} + \Phi(q,t)$$

- Riscriviamo così la seconda legge di Newton $\ddot{q} = -\partial_q \Phi(q,t)$ come:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\partial_q H(p,q,t) \\ \dot{q} = \partial_p H(p,q,t) \end{cases}$$

che sono le ben note equazioni di Hamilton.

Definizione

Definiamo un flusso

$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

ponendo

$$(p(0), q(0)) \mapsto (p(t), q(t)) \; \forall t \in \mathbb{R}$$

dove $(p(t), q(t))$ è soluzione delle equazioni di Hamilton con dato iniziale $(p(0), q(0))$.

- Per ogni t, f_t è un diffeomorfismo che prende il nome di "moto meccanico".
- In $\mathbb{R}^{2n}$ abbiamo la forma simplettica canonica: $\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$
- f_t preserva ω_0 e la forma volume di $\mathbb{R}^{2n}$ (Teorema di Liouville)

Il Teorema di non-squeezing

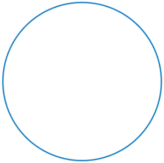
Di seguito l'enunciato del teorema centrale della tesi:

Teorema di non-squeezing

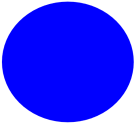
Sia $B^2(r) \subset \mathbb{R}^2$ il disco di raggio $r > 0$ tale che $\partial B^2(r) = S^1(r)$.
Si considerino il toro lagrangiano $L_R = S^1(R) \times \ldots \times S^1(R) \subset \mathbb{R}^{2n}$, e il cilindro $C_r = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Allora, se $R > r$, non esistono moti meccanici che portano L_R in C_r.

- Se $n = 1$ il risultato è ovvio: $S^1(R)$ non può essere portato in $B^2(r)$ tramite una trasformazione che preservi l'area se $R > r$
- L'enunciato del Teorema di Gromov coinvolge solamente $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

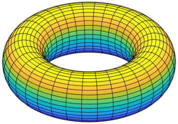
- In dimensione $2n = 2$:



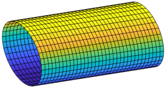
$\not\longrightarrow$



- In dimensione $2n > 2$:



$\not\longrightarrow$



Consideriamo una generica varietà simplettica (M, ω)

Definizione

Data una funzione H lisica su M, il campo vettoriale associato a questa è detto hamiltoniano se

$$i_X \omega = -dH$$

Definizione

Denotiamo con $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ l'insieme di tutti i diffeomorfismi hamiltoniani, che sono i diffeomorfismi associati, per ogni t, al flusso di un campo vettoriale hamiltoniano con dato iniziale $f_0 = \mathbb{1}$.

- Abbiamo la corrispondenza

$$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \longleftrightarrow (M, \omega)$$

$$\{\text{moti meccanici}\} \longleftrightarrow \mathrm{Ham}(M, \omega)$$

La geometria di $\mathrm{Ham}(M,\omega)$

$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ ha una struttura geometrica molto ricca:

- è un gruppo di Lie (di dimensione infinita)
- la sua algebra di Lie è lo spazio delle funzioni hamiltoniane
- è possibile definire su questo una metrica utilizzano la norma L_∞
- tale metrica è invariante per l'azione aggiunta del gruppo di Lie sulla sua algebra di Lie

Definizione

Si chiama "*metrica di Hofer*" la funzione:

$$\rho : \mathrm{Ham}(M,\omega) \times \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$$

$$\rho(\phi,\psi) = \inf_{\{f_t\}} \int_0^1 ||H_t|| dt$$

L'energia di spostamento

Per mostrare che la metrica di Hofer è non degenere si introduce l'*energia di spostamento*:

Definizione

Dato un aperto $A \subset M$ si chiama energia di spostamento di A la quantità

$$e(A) := \sup_{K \subset A} \inf\{\rho(\mathbb{1}, \phi) \mid \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega),\ \phi(K) \cap K = \emptyset\}$$

dove K è un compatto di A.

Teorema 1

Sia ρ una pseudo metrica con la proprietà di biinvarianza. Questa è non degenere se e solo se $e(A) > 0$ per ogni sottoinsieme aperto A non vuoto.

Sottovarietà lagrangiane

Consideriamo una varietà simplettica (M, ω).

Definizione

Una sottovarietà lagrangiana L è una sua sottovarietà regolare di M tale che:

- $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$
- $\omega\big|_L = 0$

Un embedding $f : L \to M$ è lagrangiano se $f^*\omega = 0$

Esempi:

- una curva in una superficie
- il toro nell'enunciato del Teorema di non-squeezing:
  $L_R = S^1(R) \times \ldots \times S^1(R) \subset \mathbb{R}^2(p_1, q_1) \times \ldots \times \mathbb{R}^2(p_n, q_n) = \mathbb{R}^{2n}(p, q)$

La classe di Liouville

- Sia $L \subset (\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$ e consideriamo la 1-forma di Liouville:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j$$

allora abbiamo

$$d(\lambda|_L) = \omega|_L = 0$$

Definizione

Definiamo la *classe di Liouville* di L essere la classe di coomologia di $\lambda_L \in H^1(L, \mathbb{R})$ e chiamiamo

$$(\lambda_L, \alpha) := \int_\alpha \lambda_L = \int_A \omega$$

area simplettica di $\alpha \in H_1(L)$.

Se λ_L è la classe di Liouville di L e se

$$\lambda_L(H_1(L;\mathbb{Z})) \subset \mathbb{R}$$

è un sottogruppo discreto, allora, denotato con $\gamma(L)$ il suo generatore, per ogni simplettomorfismo f si ha:

- $f^*\lambda_{f(L)} = \lambda_L$
- $\gamma(f(L)) = \gamma(L)$

Teorema 2 (Gromov)

Sia $L \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ una sottovarietà lagrangiana *chiusa* e sia $\phi : L \to \mathbb{R}^{2n}$ un embedding lagrangiano. Allora $\lambda_L \neq 0$.

Per fissare le idee, il toro lagrangiano L_R ha $\gamma(L_R) = \pi R^2$.

I seguenti teoremi giocano un ruolo fondamentale per la non degenerazione della metrica di Hofer.

Teorema 3

Sia $r > 0$ un numero reale e sia $L \subset B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ una sottovarietà lagrangiana chiusa e razionale con $\phi : L \to B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ embedding lagrangiano. Allora $\gamma(L) \leq \pi r^2$.

Teorema 4

Sia $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ una sottovarietà lagrangiana chiusa e razionale. Allora $e(L) \geq \frac{1}{2}\gamma(L)$.

L'operatore $\bar{\partial}$ e il problema al bordo

Consideriamo

- l'identificazione $\mathbb{R}^{2n}_{(p,q)} \to \mathbb{C}^n_{(z_1,\dots,z_n)}$, $z_j = p_j + iq_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$
- $f : D^2 \to \mathbb{C}^n$ liscia

Definizione

$$\bar{\partial} : C^\infty(D^2, \mathbb{C}^n) \to C^\infty(D^2, \mathbb{C}^n)$$

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

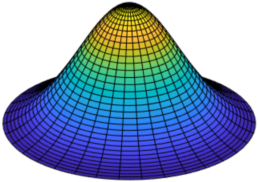
I tre teoremi precedenti sono conseguenza dello studio del seguente problema.

Consideriamo:

- $L \subset \mathbb{C}^n$ sottovarietà lagrangiana chiusa
- $g : D^2 \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ funzione liscia limitata con derivate limitate
- $\alpha \in H_2(\mathbb{C}^n, L)$

Vogliamo trovare le soluzioni $f : (D^2, \partial D^2) \to (\mathbb{C}^n, L)$ del problema

$$\begin{cases} \bar{\partial} f = g(z, f(z)) \\ [f] = \alpha \end{cases} \qquad (P(\alpha, g))$$



Conclusioni

- La soluzione del problema $P(\alpha, g)$ con i dati al bordo porta alla dimostrazione dei Teoremi 2 e 3, ovvero, con $L \subset B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ sottovarietà lagrangiana:

$$\lambda_L \neq 0$$

$$\gamma(L) \leq \pi r^2$$

- Conseguenza di questi fatti è la dimostrazione del Teorema di Gromov: essendo $\gamma(L)$ è invariante per simplettomorfismi, in forza del Teorema 3, si deduce che il toro L_R avente $\gamma(L_R) = \pi R^2$ non può essere portato in $C_r = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, che ha $\gamma(C_r) \leq \pi r^2$, mediante un diffeomorfismo hamiltoniano se $r < R$, poiché si violerebbe l'invarianza di γ.

Grazie per l'attenzione!

Bibliografia

- Augustin Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Commentarii Mathematici Helvetici 53, 1978.
- Augustin Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its applications 400, Kluwer Academic Publisher's Group, 1997
- Dusa McDuff, Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, Terza Edizione (2017), 1995.
- Mikhail L. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Mathematicae 82, 1985.
- Leonid Polterovich, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Springer Basel AG, 2001.

- Quantum blob: palla in $\mathbb{R}^{2n}$ di raggio $\sqrt{\hbar}$
- Diseguaglianza di Robertson-Schroedinger
- I quantum blobs sono utili per dare un'intuizione geometrica dell'incertezza quantistica

Maurice Alexis de Gosson, *The symplectic egg in calssical and quantum mechanics*, Articolo in American Journal of Physics, 2013.

Grazie al suo Teorema di Compattezza, Gromov dimostra che il problema può prendere due strade. Sia data una successione di funzioni $\{g_n\}$ che converge in modo liscio a una funzione g e sia f_n una soluzione del problema corrispondente $P(\alpha, g_n)$.

- la successione $\{f_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente a una soluzione $P(\alpha, g)$;
- ha luogo un fenomeno detto *bubbling off*.

Per comprendere tale fenomeno è necessario introdurre l'idea di *soluzione cuspidale* del problema al bordo:

Definizione

Una *soluzione cuspidale* di $P(\alpha, g)$ è un oggetto definito da:

i) una decomposizione della classe $\alpha = \alpha' + \sum_{j=1}^{k} \beta_j$, con $\beta_j \neq 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$ e $k \in \mathbb{N}$;

ii) una soluzione f del problema $P(\alpha', g)$;

iii) k soluzioni h_j del problema $P(\beta_j, 0), \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.

L’immagine della soluzione cuspidale è data da

$$f(D^2)\bigcup_{j=1}^{k} h_j(D^2)$$

Si parla di bubbling off quando la successione di soluzioni $\{f_n\}$ ammette una sottosuccessione, indicata a sua volta con $\{f_n\}$ per semplicità, convergente a una soluzione cuspidale.
L’unica proprietà rilevante in questo contesto è la continuità dell’area euclidea, espressa nei termini:

$$\mathrm{Area}(f_n) \to \mathrm{Area}(f) + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Area}(h_j)$$

Abbiamo così il seguente teorema.

Principio di persistenza

Data una generica famiglia $g_s(z,w),\ s \in [0,1]$ tale che $g_0 = 0$, allora si verifica una delle due opzioni:

i) $P(0, g_s)$ ammette una soluzione $\forall s \in [0,1]$

ii) ha luogo il bubbling off per qualche $s_\infty \leq 1$, ovvero esiste una sottosuccessione $s_j \to s_\infty$ tale per cui la successione delle soluzioni di $P(0, g_{s_j})$ converge a una soluzione cuspidale di $P(0, g_{s_\infty})$.

Si parla di Teorema di Compattezza perché, considerando la famiglia $g_s = g$ costante, dato che lo spazio delle soluzioni di $(P(\alpha, g))$ non è compatto, non è detto che ogni successione di soluzioni in tale spazio ammetta una sottosuccessione convergente. Il Teorema di Compattezza ci dice che ci sono due casi: ogni successione di soluzioni ammette una sottosuccessione convergente a una soluzione, oppure la stessa ammette una sottosuccessione convergente a una soluzione cuspidale, che è soluzione di un altro problema.